

# Distrazione Celeste

L'odografo per le orbite kepleriane

Riccardo Giannitrapani

Udine, 6 febbraio 2025

*Quando la sera è tersa, osservo il cielo.  
Non finisco mai di stupirmi,  
tanti punti di vista ci sono lassù*  
Wisława Szymborska

Nel corso di Astrofisica e Cosmologia che sto proponendo a ragazze e ragazzi del triennio del mio liceo mi trovo ad affrontare alcune questioni che ritengo importanti ma che a volte richiedono strumenti matematici che non sempre posso dare per scontato, soprattutto in classi eterogenee con studenti di anni diversi. La sfida didattica diventa dunque quella di poter parlare in modo concreto di aspetti importanti senza banalizzare e nello stesso tempo senza richiedere tecniche matematiche non disponibili realisticamente a tutti gli studenti e a tutte le studente. Questo tipo di lavoro richiede a volte di percorrere strade diverse da quelle tradizionali e ritengo questo sforzo utile didatticamente e culturalmente.

Come esempio di questo tipo di problema riporto qui di seguito la deduzione semplificata di un risultato standard della meccanica celeste: la traiettoria chiusa di un corpo soggetto ad una forza centrale gravitazionale è un cerchio nello spazio delle velocità (l'odografo di Hamilton<sup>1</sup>). Dopo la dimostrazione discuterò alcune conseguenze interessanti da un punto di vista didattico.

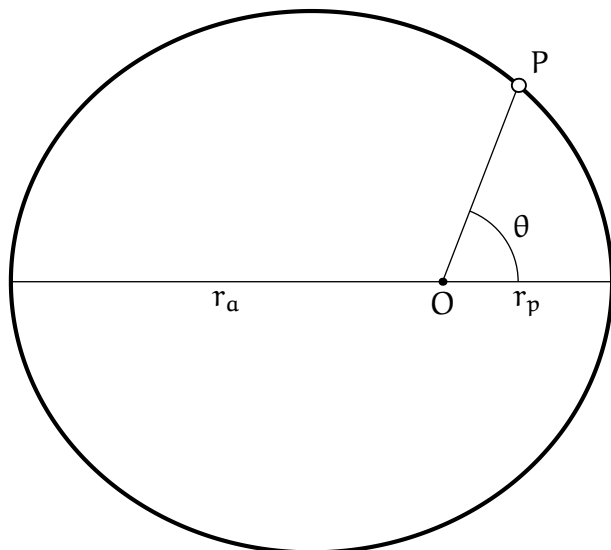
Sia dunque  $P$  un oggetto in orbita ellittica kepleriana intorno al fuoco situato in  $O$  come in figura, con  $r_p$  e  $r_a$  le distanze al perielio e all'afelio. Possiamo scrivere la prima legge della dinamica

$$m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{F}$$

e scomporla lungo i due assi  $x$  e  $y$ :

$$m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\frac{GMm}{r^2} \cos \theta$$

$$m \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -\frac{GMm}{r^2} \sin \theta$$



1. Si veda per esempio <https://www.emis.de/classics/Hamilton/Hodo.pdf>

dove il segno meno è dovuto alla natura attrattiva della forza gravitazionale<sup>2</sup>.

Moltiplichiamo e dividiamo la frazione a destra dell'uguale per la velocità angolare  $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$  ottenendo

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\frac{GM\omega}{\omega r^2} \cos \theta$$

$$\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -\frac{GM\omega}{\omega r^2} \sin \theta$$

Ricordando la definizione di momento angolare  $L = m\omega r^2$ , possiamo definire una nuova grandezza  $l$  come

$$l = \omega r^2 = \frac{L}{m}$$

Visto che per un moto dovuto ad una forza centrale il momento angolare si conserva lungo tutta la traiettoria, anche  $l$  rimane costante. Dalla definizione di velocità angolare possiamo inoltre scrivere:

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\frac{GM}{l} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \cos \theta$$

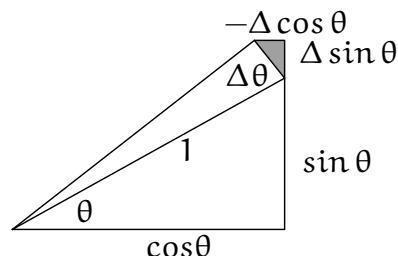
$$\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -\frac{GM}{l} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \sin \theta$$

Possiamo semplificare il  $\Delta t$  a destra e sinistra. Inoltre, con una semplice considerazione geometrica, è possibile riscrivere i termini che contengono le funzioni goniometriche in modo più semplice<sup>3</sup>.

Consideriamo infatti un triangolo rettangolo di ipotenusa 1 e angolo  $\theta$  come in figura e immaginiamo di variare l'angolo  $\theta$  di una piccola quantità  $\Delta\theta$ . Si vede facilmente che quando  $\Delta\theta$  è "piccolo" il triangolo grigio è simile al triangolo di partenza.

Dunque

$$\Delta \sin \theta = \Delta \theta \cos \theta \quad \Delta \cos \theta = -\Delta \theta \sin \theta$$



2. Ovviamente servirebbe una derivata; questo è esattamente il tipo di strumento che non è disponibile in modo generale all'interno di una classe e quindi riformulo le equazioni dinamiche con le differenze finite.

3. Nuovamente questo passaggio diventa molto semplice avendo a disposizione le derivate; il ragionamento geometrico che qui riporto è a mio avviso più interessante e mette in luce la natura geometrica del processo di derivazione. Si veda per esempio T.Needham, Visual Complex Analysis, Clarendon Press.

Tornando alle nostre equazioni del moto otteniamo quindi

$$\Delta v_x = -\frac{GM}{l} \Delta \sin \theta$$

$$\Delta v_y = \frac{GM}{l} \Delta \cos \theta$$

Portando tutto a sinistra e considerando un'unica variazione, si ottiene

$$\Delta \left( v_x - \frac{GM}{l} \sin \theta \right) = 0$$

$$\Delta \left( v_y + \frac{GM}{l} \cos \theta \right) = 0$$

Ma se una grandezza ha variazione nulla vuol dire che è costante, e dunque

$$v_x - \frac{GM}{l} \sin \theta = k_x \quad (1)$$

$$v_y + \frac{GM}{l} \cos \theta = k_y \quad (2)$$

con  $k_x$  e  $k_y$  opportune costanti che dipendono dalle condizioni iniziali. Esplicitando quindi le funzioni goniometriche

$$\sin \theta = \frac{v_x - k_x}{\left(\frac{GM}{l}\right)}$$

$$\cos \theta = -\frac{v_y - k_y}{\left(\frac{GM}{l}\right)}$$

e usando la relazione  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , si ottiene l'equazione per le componenti della velocità:

$$(v_x - k_x)^2 + (v_y - k_y)^2 = \left(\frac{GM}{l}\right)^2$$

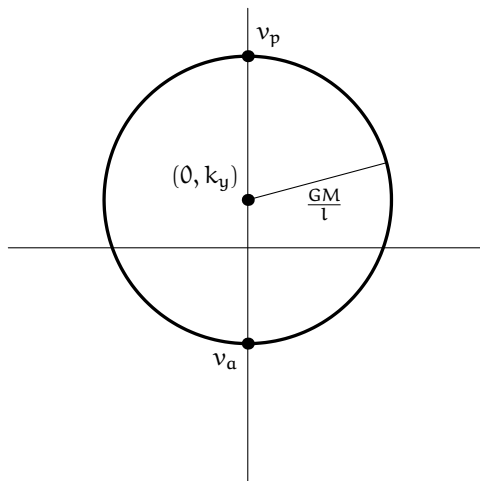
È immediato verificare quindi che nello spazio delle velocità questa equazione descrive una circonferenza centrata in  $(k_x, k_y)$  di raggio  $\frac{GM}{l}$ .

Se consideriamo come in figura  $\theta = 0$  il perielio e indichiamo con  $v_p$  la velocità del corpo al perielio, dalle equazioni (1) e (2) si ottiene  $k_x = 0$  e  $k_y = v_p - \frac{GM}{l}$ .

Per definizione di momento angolare si vede subito che  $l = v_p r_p = -v_a r_a$  e quindi

$$k_y = \frac{v_p^2 r_p - GM}{v_p r_p} \quad (3)$$

Abbiamo quindi ottenuto il seguente risultato notevole: nello spazio delle velocità l'orbita ellittica kepleriana è descritta da una circonferenza come in figura.



Si vede che le intersezioni della circonferenza con l'asse  $v_y$  rappresentano le velocità al perielio e all'afelio, velocità che si ottengono a questo punto facilmente aggiungendo o togliendo il raggio  $\frac{GM}{l}$  dalla posizione del centro. Per esempio  $v_a$  è la velocità del corpo all'afelio e si vede subito che è data da

$$v_a = v_p - \frac{2GM}{l}$$

Vediamo infine alcuni casi particolari del risultato ottenuto di interesse didattico.

Se il centro si trova nell'origine allora in modulo  $v_a$  e  $v_p$  coincidono; per la definizione di  $l$  allora anche  $r_a = r_b$  e l'orbita è una circonferenza e il modulo della velocità e la distanza di P da O sono costanti. Dalla (3) si vede che il centro si trova nell'origine se  $k_y = 0$  e quindi se la velocità  $v$  è legata al raggio  $r$  (possiamo togliere tutti i pedici in quanto  $v$  e  $r$  sono costanti) dalla seguente relazione

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Questa è la nota relazione per la velocità orbitale di un'orbita circolare kepleriana.

Se invece  $v_p$  è pari al diametro dell'odografo,  $v_p = \frac{2GM}{l}$ , si vede subito che  $v_a = 0$ . Ma questo significa che  $r_a$  tende all'infinito (in un tempo infinito), cioè l'orbita ellittica degenera in una parabola con vertice nel perielio. Facendo i calcoli (esercizio) si trova la condizione su  $v_p$ :

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM}{r_p}}$$

e questa è la nota relazione per la velocità di fuga di un corpo a distanza  $r_p$ . È interessante notare che questa relazione è stata ottenuta per via geometrica dall'odografo (e non usando il concetto di energia potenziale gravitazionale) e il fattore 2 sotto la radice rispetto alla velocità orbitale di un'orbita circolare assume un significato geometrico ben preciso. Si noti inoltre che in questo caso la traiettoria del corpo non corrisponde all'intero odografo, ma solo a metà (semicirconferenza).

Lascio come esercizio lo studio del caso in cui la velocità  $v_p$  supera il limite di velocità di fuga appena trovato. In tal caso la circonferenza nello spazio delle velocità è interamente contenuta nel semipiano superiore. Non è difficile convincersi che l'orbita del corpo è una iperbole e che l'odografo sarà un arco di circonferenza; si può anche facilmente dimostrare che tale arco parte da  $(0, v_p)$ , che è il punto di intersezione superiore della circonferenza con l'asse  $v_y$ , e arriva (in un tempo infinito) al punto in cui la retta passante per l'origine è tangente alla circonferenza.

Infine potrebbe valere la pena studiare come esercizio personale anche il caso in cui  $v_p$  sia inferiore al raggio  $\frac{GM}{l}$  e quindi la circonferenza è centrata nel semipiano negativo. È abbastanza semplice determinare le orbite in questo caso e verificare che il caso limite in cui  $v_p$  tende a 0 non è, nelle condizioni poste dal problema, raggiungibile.

Per gli studenti e le studente di quinta costituisce inoltre un utile esercizio riformulare tutto il problema utilizzando le derivate invece delle differenze finite.